

Recasages possibles : 149, 161.

Référence : Algèbre, GOURDON (p. 262-263)

Développement Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour $x_1, \dots, x_n \in E$, on note $G(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de Gram de la famille (x_1, \dots, x_n) et $g(x_1, \dots, x_n)$ son déterminant.

Lemme 1 Pour $x_1, \dots, x_n \in E$, on a $g(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ est liée.

Théorème 2 Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , dont (f_1, \dots, f_n) est une base. Alors, pour tout $x \in E$, on a $d(x, F)^2 = \frac{g(f_1, \dots, f_n, x)}{g(f_1, \dots, f_n)}$.

Théorème 3 Pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$, $g(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2$ avec égalité si et seulement si l'un des x_j est nul, ou si (x_1, \dots, x_n) est orthogonale.

Corollaire 4 (Inégalité d'Hadamard) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on note $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$ les vecteurs colonnes, on a $|\det(A)| \leq \|x_1\|_2 \cdots \|x_n\|_2$, avec égalité si et seulement si l'un des x_j est nul, ou si (x_1, \dots, x_n) est orthogonale.

• *Preuve du Lemme 1* : Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Montrons le lemme par double implication :

(\Leftarrow) Supposons la famille (x_1, \dots, x_n) liée. Il existe donc $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\lambda_j \in \mathbb{K}$ pour $j \neq k$ tels que $x_k = \sum_{j \neq k} \lambda_j x_j$. Notons $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$ les vecteurs co-

lonnes de $G(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j = \begin{pmatrix} \langle x_1 | x_j \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n | x_j \rangle \end{pmatrix}$.

En particulier, par anti-linéarité à droite du produit scalaire,

$$C_k = \begin{pmatrix} \langle x_1 | x_k \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n | x_k \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j \neq k} \overline{\lambda_j} \langle x_1 | x_j \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j \neq k} \overline{\lambda_j} \langle x_n | x_j \rangle \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \overline{\lambda_j} \begin{pmatrix} \langle x_1 | x_j \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n | x_j \rangle \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \overline{\lambda_j} C_j.$$

Ainsi, $G(x_1, \dots, x_n)$ a une colonne qui est combinaison linéaire des autres, donc le caractère alterné du déterminant donne $g(x_1, \dots, x_n) = 0$.

(\Rightarrow) Supposons que $g(x_1, \dots, x_n) = 0$. En gardant les mêmes notations que précédemment, il existe donc $\lambda_j \in \mathbb{K}$ pour $j \neq k$ tels que $C_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j C_j$. Le

même calcul que précédemment donne $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x_i | x_k \rangle = \langle x_i | \sum_{j \neq k} \overline{\lambda_j} x_j \rangle$. Ainsi, $x_k - \sum_{j \neq k} \overline{\lambda_j} x_j$ est orthogonal à tous les x_i , donc orthogonal à lui-même par linéarité, et donc nul (le produit scalaire étant défini). Ainsi $x_k = \sum_{j \neq k} \overline{\lambda_j} x_j$ et la famille (x_1, \dots, x_n) est bien liée, ce qui termine la preuve du **Lemme 1**.

• *Preuve du Théorème 2* : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension n et (f_1, \dots, f_n) une base de F . Fixons $x \in E$. Comme F est de dimension finie, d'après le théorème de projection orthogonale, il existe un unique point $y \in F$ minimisant la distance de x à F , i.e vérifiant $\|x - y\| = \inf_{\gamma \in F} \|x - \gamma\| = d(x, F)$.

Notons $z = x - y \in F^\perp$. On a alors $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ d'après le théorème de Pythagore, et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle f_i | x \rangle = \langle f_i | y \rangle$. Ainsi,

$$\begin{aligned} G(f_1, \dots, f_n, x) &= \begin{pmatrix} \langle f_1 | f_1 \rangle & \cdots & \langle f_1 | f_n \rangle & \langle f_1 | x \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle f_n | f_1 \rangle & \cdots & \langle f_n | f_n \rangle & \langle f_n | x \rangle \\ \langle x | f_1 \rangle & \cdots & \langle x | f_n \rangle & \langle x | x \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G(f_1, \dots, f_n) & (\langle f_i | x \rangle)_{1 \leq i \leq n} \\ (\langle x | f_j \rangle)_{1 \leq j \leq n} & \|x\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G(f_1, \dots, f_n) & (\langle f_i | y \rangle)_{1 \leq i \leq n} \\ (\langle y | f_j \rangle)_{1 \leq j \leq n} & \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne implique

$$\begin{aligned} g(f_1, \dots, f_n, x) &= g(f_1, \dots, f_n, y) + \begin{vmatrix} G(f_1, \dots, f_n) & 0 \\ (\langle y | f_j \rangle)_{1 \leq j \leq n} & \|z\|^2 \end{vmatrix} \\ &= g(f_1, \dots, f_n, y) + \|z\|^2 g(f_1, \dots, f_n) \end{aligned}$$

en développant par rapport à la dernière colonne. Or, $y \in F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ donc la famille (f_1, \dots, f_n, y) est liée, et ainsi d'après le **Lemme 1**, on a $g(f_1, \dots, f_n, y) = 0$. De plus, $\|z\|^2 = d(x, F)^2$ par construction, et comme (f_1, \dots, f_n) est libre, encore d'après le **Lemme 1**, on a $g(f_1, \dots, f_n) \neq 0$. Par

conséquent, on obtient bien

$$d(x, F)^2 = \frac{g(f_1, \dots, f_n, x)}{g(f_1, \dots, f_n)}.$$

Ceci achève la preuve du **Théorème 2**.

- *Preuve du Théorème 3* : Remarquons que si $x_1, \dots, x_n \in E$ forment une famille liée, alors $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ d'après le **Lemme 1**, donc l'inégalité est triviale. Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : "si $x_1, \dots, x_n \in E$ sont linéairement indépendants, alors $g(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$, avec égalité si et seulement si (x_1, \dots, x_n) est une famille orthogonale.

- Si $n = 1$, et $x_1 \in E \setminus \{0\}$, alors $g(x_1) = \|x_1\|^2$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie (une famille à 1 élément étant toujours orthogonale).
- Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ soit vraie et fixons $x_1, \dots, x_n \in E$ linéairement indépendants. Posons $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ et notons y le projeté orthogonal de x_n sur F . Comme la famille (x_1, \dots, x_{n-1}) est une base de F (génératrice par définition et libre car (x_1, \dots, x_n) l'est), d'après le **Théorème 1**, on a

$$g(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{n-1})d(x_n, F)^2 = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \|x_n - y\|^2.$$

Alors, par hypothèse de récurrence, puis par le théorème de Pythagore, on obtient

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{(*)}{\leq} \prod_{k=1}^{n-1} \|x_k\|^2 \|x_n - y\|^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \|x_k\|^2 (\|x_n\|^2 - \|y\|^2) \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2. \end{aligned}$$

L'inégalité est donc bien vérifiée, et on a égalité si et seulement si $(*)$ et $(**)$ sont des égalités. Or, par hypothèse de récurrence, $(*)$ est une égalité si et seulement si (x_1, \dots, x_{n-1}) est orthogonale, et $(**)$ est une égalité si et seulement si $\|y\|^2 = 0$, i.e $y = 0$, qui équivaut à $x_n \in F^\perp$. La conjonction de ces deux conditions donne bien $g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale, ce qui conclut la récurrence et la preuve du **Théorème 3**.

- *Preuve du Corollaire 4* : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$. On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont les colonnes sont les x_i . On a

$$|\det(A)|^2 = \overline{\det(A)} \det(A) = \det(A^*) \det(A) = \det(A^* A)$$

Or, $A^* A = (\langle x_j | x_k \rangle)_{j,k \in [1,n]} = G(x_1, \dots, x_n)$, où l'on a noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire hermitien canonique sur \mathbb{C}^n . Ainsi, d'après le **Théorème 3**,

$$|\det(A)|^2 = g(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|_2^2,$$

ce qui, par passage à la racine carrée, nous donne bien l'inégalité souhaitée. Le cas d'égalité est directement donné par le cas d'égalité dans le **Théorème 3**, ce qui achève la preuve du **Corollaire 4**.